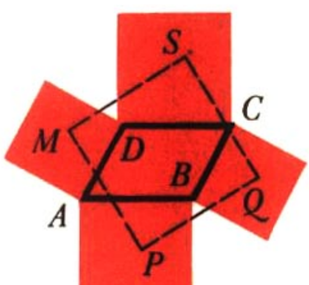
Lecciones populares de matemáticas

MÉTODO CINEMÁTICO EN PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Yu. I. Lyúbich
L. A. Shor



Editorial MIR Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Ю. И. ЛЮБИЧ И Л. А. ШОР

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

YU. I. LYUBICH y L. A. SHOR

MÉTODO CINEMÁTICO EN PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Segunda edición

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por
G. A. LOZHKIN

Primera edición 1978
Segunda edición 1984

На испанском языке

Impreso en la URSS

CONTENIDO

RESEÑA

A veces, para resolver un problema geométrico, es útil imaginar las transformaciones que sufrirán los elementos de la figura a examinar, si algunos de sus puntos empiezan a desplazarse. La dependencia de unos elementos en función de otros puede pasar a ser evidente en este caso y la solución del problema saltará a la vista.

Por lo común, las relaciones entre las magnitudes de los segmentos, de los ángulos, etc., en las figuras geométricas son más complicadas que las existentes entre las velocidades de variación de estas magnitudes durante los procesos de deformación de las mismas. Por eso para la solución de los problemas geométricos puede ser útil la "teoría de las velocidades" – la cinemática.

En este folleto se dan algunos ejemplos para demostrar cómo la cinemática se aplica a los problemas de la geometría elemental y se propone cierta cantidad de problemas para ejercicios individuales. Previamente se exponen las nociones generales necesarias de cinemática (y de álgebra vectorial).

El folleto está escrito basándose en las lecciones dadas en el círculo matemático escolar adjunto a la Universidad Estatal "A. M. Gorki" de Járkov. Se destina para los alumnos de 9no y 10mo grados.

INTRODUCCIÓN

Un día nos encontramos en un libro de matemáticas serio[1] con un problema que nos pareció que había llegado de las obras de Conan Doyle o Stevenson. En éste se trataba de las búsquedas de un tesoro. Cierta persona se enteró de que en el lugar donde hay enterrado un tesoro crecen solamente tres árboles: un roble, un pino y un abedul. Para encontrar el tesoro hay que situarse debajo del abedul (en la fig. 1 éste se designa con el punto A), volviéndose de cara a la línea recta que pasa a través del roble y el pino (en la fig. 1 son los puntos R y P). En este caso el roble ha de estar a la derecha y el pino, a la izquierda. Luego es necesario dirigirse hacia el roble, contando los pasos. Al llegar al roble se vira en ángulo recto hacia la derecha y se da la misma cantidad de pasos que se dio entre el abedul y el roble. En este punto es necesario detenerse y clavar un jalón (en la fig. 1 es el punto J_1). Después hay que regresar al abedul y dirigirse desde éste hacia el pino, contando los pasos. Al llegar al pino se vira en ángulo recto hacia izquierda y se da la misma cantidad de pasos que se dio entre el abedul y el pino. En este punto

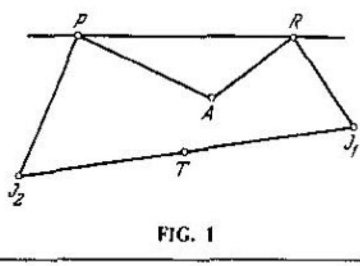


FIG. 1

es preciso detenerse y clavar otro jalón (en la fig. 1 es el punto J_2). El tesoro está enterrado precisamente en el centro entre los jalones (en la fig. 1 es el punto T).

En presencia de una instrucción tan detallada las búsquedas del tesoro no pudieron provocar dificultades. Sin embargo, éstas a pesar de todo surgieron. Resultó que cuando el buscador de tesoro

[1] T. Saati. Métodos matemáticos de investigación de las operaciones, Ed. Voenizdat, 1963, ed. en ruso.

llegó al terreno indicado sólo encontró el roble y el pino. No había ni señal del abedul. Pero, con todo, encontró el tesoro. Surge la pregunta, ¿cómo logró hacerlo?

Puesto que el problema se expuso en un libro de matemáticas serio era de esperar que la causa no residiera sencillamente en la buena suerte. En realidad, el problema tiene solución matemática, a propósito, completamente accesible para el alumno.

De los puntos J_1, J_2, A y T bajemos perpendiculares a la recta RP (véase fig. 2). Designemos sus bases con J'_1, J'_2, A' y T respectivamente. Señalemos la igualdad de pares siguientes de los

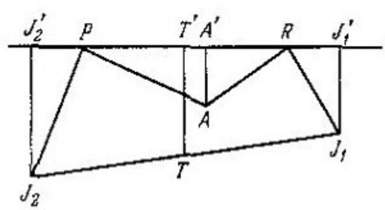


FIG. 2

triángulos rectángulos (según un lado y un ángulo agudo)

$$\Delta RJ_1J'_1 = \Delta RAA'; \quad \Delta PJ_2J'_2 = \Delta PAA'.$$

De la igualdad de los triángulos se deduce que $J_1J'_1 = RA'$, $RJ'_1 = AA'$ y $J_2J'_2 = PA'$, $PJ'_2 = AA'$. Puesto que el punto T es el centro del segmento J_1J_2, resulta que TT' es la línea media del trapecio $J_1J'_1J_2J'_2$ y por eso

$$TT' = \frac{1}{2}(J_1J'_1 + J_2J'_2) = \frac{1}{2}(RA' + A'P) = \frac{1}{2}RP.$$

Luego el punto T' es el centro del segmento $J'_1J'_2$ y, puesto que $RJ'_1 = PJ'_2 (= AA')$, resulta que T' el centro del segmento RP. De este modo la posición del punto T no depende de la posición del punto A. Para hallar el punto T es suficiente levantar una perpendicular desde el centro del segmento RP y trazar en esta perpendicular un segmento igual a $\frac{1}{2}RP$, de tal modo que el punto R resulte a la derecha y el punto P, a la izquierda.

Aunque la solución aducida es irreprochable, a pesar de todo deja cierta sensación de insatisfacción. La idea principal de bajar perpendiculares desde los puntos J_1, J_2, A y T hacia la recta RP no se liga de ningún modo con el planteamiento del problema y, desde nuestro punto de vista, resulta muy artificial [1]. Es mucho más natural aclarar en cuanto depende la posición del punto T de la posición del punto A o, en otras palabras, cómo se desplazará el punto T en caso de movimiento del punto A. Esta idea la dicta, a propósito, la misma fábula del problema. Es fácil imaginar que al no encontrar el abedul el buscador de tesoro empezara a deambular por el lugar en busca de sus restos, razonando a la par: "Si el abedul estaba aquí, el tesoro tendría que encontrarse allí y si el abedul estaba aquí, entonces...". En aquella ocasión podría notar que la posición del tesoro no depende de la posición del abedul. Al notarlo tomaría la azada, dejando las búsquedas de la demostración para mejor tiempo. Pero a nosotros, a diferencia de él, nos interesa precisamente la cuestión de cómo, razonando de tal modo, no sólo notar, sino también demostrar que la posición del punto T (tesoro) no depende de la posición del punto A (abedul).

Imaginemos que el punto A empezó a desplazarse. Sea $\mathbf{v}$ el vector de su velocidad instantánea. Puesto que el segmento RJ_1 se obtiene a partir del segmento RA, girando en el ángulo $\frac{\pi}{2}$; el punto J_1 se desplazará en concordancia con el punto A, de tal modo que el vector $\mathbf{v}_1$ de su velocidad se obtendrá del vector $\mathbf{v}$, girando en el ángulo $\frac{\pi}{2}$. De modo análogo el vector $\mathbf{v}_2$ de velocidad del punto J_2 se obtendrá del $\mathbf{v}$, girando en el ángulo [2] $-\frac{\pi}{2}$. Por eso $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$. Esto significa que el punto T, como centro del segmento J_1J_2, tiene la velocidad

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 0.$$

[1] Semejantes "artificios" se encuentran muy a menudo en las soluciones de los problemas geométricos. Esto dio motivo al conocido matemático francés J. Favart para decir que para muchas personas la "geometría pertenece al arte de demostrar cualquier propiedad al examinar un círculo elegido con perfidia y uniendo con suerte los puntos separados cuidadosamente".

[2] Recordemos que el ángulo de giro se considera positivo si éste se efectúa en sentido antihorario, y negativo si se efectúa en sentido horario.

¡Pero si la velocidad del punto siempre es igual a cero, entonces este punto es inmóvil! De este modo, en caso de movimiento arbitrario del punto A el punto T permanece inmóvil. Por consiguiente, la posición del punto T no depende de la posición del punto A.

Ahora, para hallar la posición del punto T es suficiente elegir una posición cualquiera del punto A. Es posible que lo más

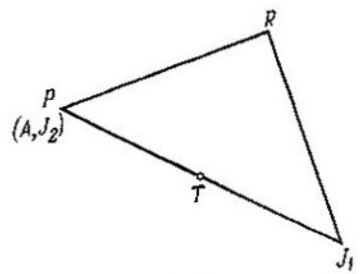


FIG. 3

simple es hacer coincidir el punto A con el punto P y usar construcción conocida por el buscador de tesoro (fig. 3).

Esta solución se basa en consideraciones cinemáticas y puede parecer difícil al alumno en virtud de su conocimiento insuficiente sobre las propiedades de los vectores y las velocidades.

Por eso en el libro dedicado a la aplicación del método cinemático a los problemas geométricos tuvimos que relatar mucho sobre los vectores y las velocidades. Estos conceptos juegan un papel importante en una serie de partes de las matemáticas y la física. Por eso el conocimiento de los mismos es también útil.

En los §§ 1 y 2 hay muchas cosas que no se demuestran, sino que sólo se explican. Pero, dirigiéndose por los dibujos y razonando el lector podrá por sí mismo llegar sin gran dificultad a demostraciones suficientemente completas. El lector competente puede limitarse al conocimiento superficial del material de estos párrafos.

El párrafo 3 es el principal de este libro. Allí se examina un número determinado de problemas con aplicación del método cinemático y están enunciados los problemas para ejercicios individuales.

§ 1
ELEMENTOS DE ÁLGEBRA VECTORIAL

№ 1. Los segmentos orientados se llaman *vectores*. En el dibujo los vectores se presentan por segmentos que llevan saetas para indicar la dirección (véase fig. 4). El origen del vector se llama también su punto de aplicación. El vector cuyo origen es A y cuyo extremo es B se designa $\overline{AB}$ (¡pero no $\overline{BA}$! $\overline{BA}$ significa vector con origen en B y extremo en A). Con frecuencia para designar el vector se usa una letra, por ejemplo, $\overline{AB} = \mathbf{a}$. Está admitido imprimir esta letra en negrilla para dar a conocer de inmediato que se trata de un vector y no de un número. Si un vector está designado, por ejemplo, mediante $\mathbf{a}$, entonces su longitud se representa por $|\mathbf{a}|$ de modo análogo al valor absoluto de un número[1]. Con frecuencia la longitud del vector también se llama *valor absoluto*.

FIG. 4

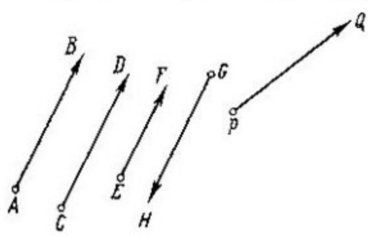


FIG. 5

La igualdad de dos vectores no se entiende como la identidad total, sino de modo algo más amplio. Y precisamente dos vectores se llaman *iguales* si son iguales sus longitudes y sus direcciones coinciden. De este modo los vectores iguales son obligatoriamente paralelos o se hallan sobre una recta (es decir son "colineales"). En la fig. 5

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \quad \overline{AB} \neq \overline{PQ}, \quad \overline{AB} \neq \overline{EF}, \quad \overline{AB} \neq \overline{GH}.$$

[1] La longitud del vector $\overline{AB}$ a menudo se designa simplemente AB

De la determinación de igualdad se deduce que en una traslación paralela el vector no varía.

Para el futuro tiene importancia considerar el punto como un segmento cuyo origen y extremo coinciden. Tal segmento "degenerado" también se considera vector, pero no se le atribuye ninguna dirección determinada[1]. Se llama vector *nulo* y se designa con **0**. Su longitud es igual a cero: $|\mathbf{0}| = 0$.

№ 2. *La suma* de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se llama vector $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ que parte del origen del vector $\mathbf{a}$ hacia el extremo del vector $\mathbf{b}$ (fig. 6) con la condición de que el origen del vector $\mathbf{b}$ coincide con el extremo del vector $\mathbf{a}$ (esto siempre se logra valiéndose de la traslación paralela del vector $\mathbf{b}$).

La suma de vectores, igual que la suma de números, se somete a las leyes conmutativa y asociativa.

La ley conmutativa se expresa mediante la fórmula

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \tag{1}$$

Su validez se percibe de la fig. 7 donde los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están aplicados a un punto y sirven en calidad de lados del

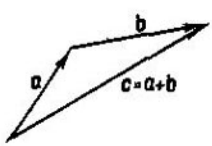


FIG. 6

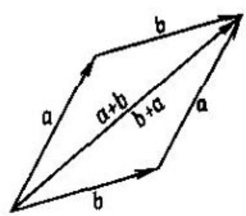


FIG. 7

paralelogramo. La diagonal de este paralelogramo, que va desde el origen común de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, es igual (como vector) por una parte a la suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y por otra, a la suma $\mathbf{b} + \mathbf{a}$.

La ley asociativa se expresa mediante la fórmula

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \tag{2}$$

cuya validez se percibe de la fig. 8.

[1] Es decir, cualquier dirección se considera como la de este vector.

Gracias a las leyes conmutativa y asociativa se puede, durante la suma de vectores, igual que durante la suma de números, no hacer caso al orden de los sumandos, ni a su agrupación. En particular, se puede escribir simplemente $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, omitiendo los paréntesis.

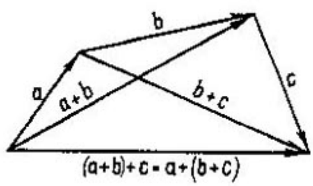


FIG. 8

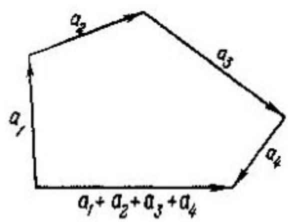


FIG. 9

La suma de varios vectores se explica en la fig. 9, en la que los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ unidos sucesivamente uno a otro, forman la línea quebrada (poligonal) "cerrada" por el vector-suma $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$.

Es evidente que la suma de varios vectores es igual a cero si, y sólo si la línea quebrada formada por ellos está cerrada, es decir, el extremo del último vector sumando coincide con el origen del primero (véase fig. 10).

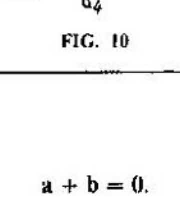


FIG. 10

Sea, por ejemplo,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = 0.$$

En este caso la longitud del vector $\mathbf{b}$ ha de ser igual a la longitud del vector $\mathbf{a}$ y su dirección es contraria a la del vector $\mathbf{a}$.

El vector $\mathbf{b}$ determinado de tal modo se llama *opuesto* al vector $\mathbf{a}$ y se designa con $-\mathbf{a}$.

Las fórmulas

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \tag{3}$$

que se deducen directamente de las determinaciones, juegan un papel importante en álgebra vectorial. En particular, con su ayuda se puede investigar la operación de resta de vectores que es inversa a la operación de suma.

№ 3. Se llama *diferencia* $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ a tal vector $\mathbf{c}$ en cuya presencia

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}. \tag{4}$$

El método de construir la diferencia se indica en la fig. 11, *a*. Al mismo tiempo la resta puede reducirse a la adición operando

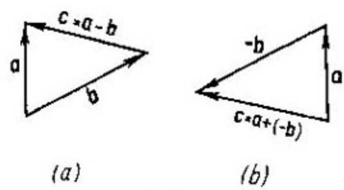


FIG. 11

de modo siguiente. Sumemos a ambos miembros de la igualdad (4) el vector $-\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + (-\mathbf{b}).$$

De acuerdo con las leyes asociativa y conmutativa obtenemos:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{c} + [\mathbf{b} + (-\mathbf{b})],$$

de donde en virtud de las fórmulas (3)

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{c} + \mathbf{0} = \mathbf{c}.$$

De este modo,

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}). \tag{5}$$

Esto da un método más para construir la diferencia, indicado en la fig. 11, *b*.

Notemos además las fórmulas

$$\mathbf{a} - \mathbf{0} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{0} - \mathbf{a} = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}. \tag{6}$$

A propósito, puesto que según la determinación de la diferencia las igualdades

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

significan lo mismo, el vector puede transferirse de un miembro de la igualdad al otro con signo opuesto.

№ 4. Necesitaremos una desigualdad importantísima que se llama *desigualdad de triángulo*. Refiramonos a la fig. 6 (pág. 14). Según el teorema geométrico conocido tiene lugar la desigualdad

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|. \tag{7}$$

Aquí el signo de igualdad se logra si, y sólo si los vectores tienen la misma dirección.

Pueden indicarse varias desigualdades más que son análogas a la desigualdad de triángulo, por ejemplo,

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|; \quad |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|. \tag{8}$$

№ 5. Se llama *producto* $\lambda\,\mathbf{a}$ del vector $\mathbf{a}$ por un número real λ el vector $\mathbf{c}$ que se determina por las condiciones siguientes.

1) $|\mathbf{c}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$ ($|\lambda|$ es valor absoluto del número λ);

2) $\mathbf{c}$ es colineal al vector $\mathbf{a}$;

3) cuando $\lambda > 0$ la dirección del vector $\mathbf{c}$ coincide con la del vector $\mathbf{a}$ y cuando $\lambda < 0$, estas direcciones son contrarias. En la

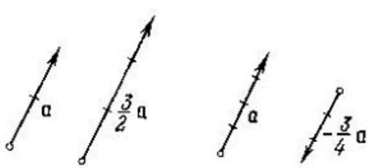


FIG. 12

fig. 12 están presentados los casos: $\lambda = \frac{3}{2}$ y $\lambda = -\frac{3}{4}$. Es evidente que

$$\mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{a} = 2\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} = 3\mathbf{a}, \ldots$$

y

$$-\mathbf{a} = (-1) \cdot \mathbf{a}, \quad (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) = (-2) \cdot \mathbf{a},$$

$$(-\mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) + (-\mathbf{a}) = (-3) \cdot \mathbf{a}, \ldots$$

Enumeremos las leyes principales a las que se subordina la multiplicación de un vector por un número.

1) *La ley asociativa*

$$\mu(\lambda\mathbf{a}) = (\mu\lambda)\mathbf{a} \tag{9}$$

se muestra en la fig. 13, en la que están presentados los casos:

$$\lambda > 0,\ \mu > 0 \text{ y } \lambda > 0,\ \mu < 0.$$

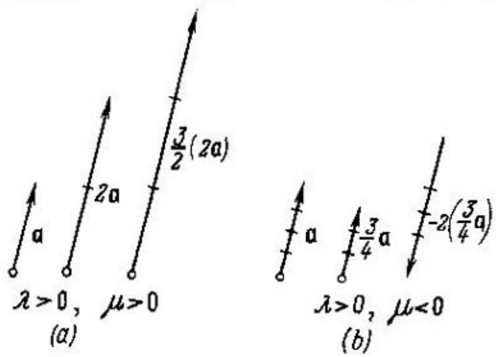


FIG. 13

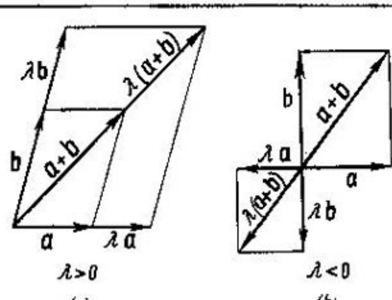


FIG. 14

2) *La ley distributiva respecto al factor numérico*

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \tag{10}$$

se muestra en la fig. 14, en la que están presentados los casos:

$$\lambda > 0 \text{ y } \lambda < 0.$$

3) *La ley distributiva respecto al factor vectorial*

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} \tag{11}$$

se muestra en la fig. 15, en la que están presentados los casos:

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0 \quad \text{y} \quad \lambda > 0, \quad \mu < 0, \quad \lambda + \mu > 0.$$

Además, llamemos la atención del lector sobre las igualdades evidentes:

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \qquad \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Se puede introducir también *la división del vector entre un número*. El producto del vector **a** por el número inverso respecto

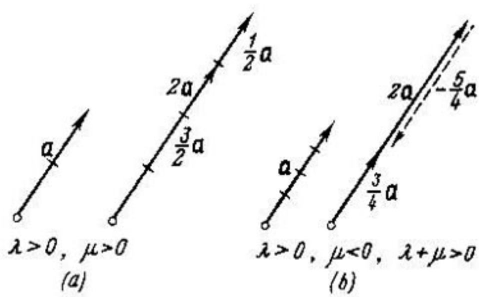


FIG. 15

a λ se llama cociente de la división del vector **a** entre el número $\lambda \neq 0$:

$$\frac{\mathbf{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbf{a}. \tag{13}$$

Pues, vemos que las operaciones examinadas en el álgebra vectorial se subordinan a las mismas leyes principales que las operaciones correspondientes con los números. Por eso en el álgebra vectorial son válidos todos los corolarios lógicos de estas leyes, lo que permite operar con los vectores de igual modo que con los números. Por ejemplo, en la expresión $(\lambda + \mu)(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ pueden abrirse los paréntesis como de costumbre, en cuyo resultado obtenemos $\lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ (esto se deduce de las leyes distributivas).

№ 6. A partir de este momento consideraremos que todos los vectores se hallan en un mismo plano [1], es decir, ocupémonos solamente de planimetría.

Sean **a** y **b**, dos vectores no colineales y **c** un tercer vector cualquiera. Si el vector **c** es colineal con uno de los vectores **a** o **b**, por ejemplo, con el vector **a**, entonces se encontrará un número tal λ que

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a}. \tag{14}$$

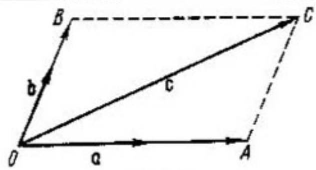


FIG. 16

En caso general apliquemos los tres vectores a un punto O (fig. 16) y después de esto tracemos por el extremo C del vector **c** las rectas paralelas a los vectores **a** y **b**. Éstas intersecarán las rectas en que se encuentran **a** y **b** en los puntos A y B, respectivamente.

Es evidente que

$$\mathbf{c} = \overline{OA} + \overline{OB}.$$

Pero, puesto que vectores $\overline{OA}$ y **a** son colineales, se encontrará un número tal λ que

$$\overline{OA} = \lambda \mathbf{a}.$$

De modo análogo se encontrará un número tal μ que

$$\overline{OB} = \mu \mathbf{b}.$$

Por consiguiente

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}. \tag{15}$$

La presentación del vector **c** en forma de (15) se llama *descomposición* de este vector en los vectores **a** y **b**. Cualquier

[1] El lector que no conoce estereometría, por lo visto, lo considera así desde el principio. En tal caso no ha perdido nada esencial.

vector **c** puede descomponerse en dos vectores no colineales **a** y **b**. En este caso los coeficientes λ y μ están determinados de modo único.

Notemos que la igualdad (14) se escribe en forma de (15) con el coeficiente $\mu = 0$.

№ 7. Sean A, B, C tres puntos que se encuentran en una recta. Se dice que el punto C divide el segmento AB en la relación $m:n$, si [1]

$$n\overline{AC} = m\overline{CB}. \tag{16}$$

Es evidente que el valor absoluto de la relación $m:n$ es igual a la relación de las longitudes $AC:CB$. La relación $m:n$ es positiva si el punto C se halla dentro del segmento AB, y negativa, si éste se encuentra fuera del segmento (fig. 17).

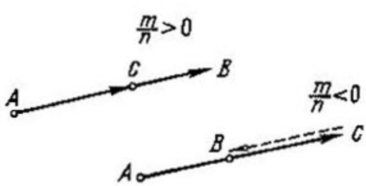


FIG. 17

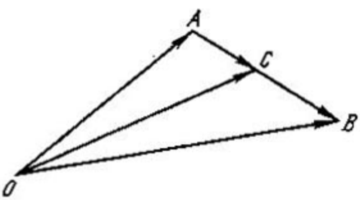


FIG. 18

Teorema. Supongamos que el punto C divide el segmento AB en la relación $m:n$ y sea O el punto arbitrario del plano (fig. 18). Entonces

$$\overline{OC} = \frac{n\overline{OA} + m\overline{OB}}{m+n}. \tag{17}$$

De modo inverso, *si para cualquier punto O se cumple la igualdad* (17), *entonces el punto C divide el segmento en la relación* $m:n$.

Demostración. Qué se cumpla (16). Puesto que

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}, \quad \overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC},$$

[1] m, n son números reales cualesquiera, no iguales a cero simultáneamente. Si $m = 0$, entonces el punto C coincide con el punto A; si $n = 0$, en este caso C coincide con B.

entonces

$$n(\overline{OC} - \overline{OA}) = m(\overline{OB} - \overline{OC}).$$

Resolviendo esta ecuación respecto a $\overline{OC}$ llegamos a (17).

De modo análogo de (17) se obtiene (16).

№ 8. Como se sabe, la recta dotada de la dirección "positiva" se llama *eje*.

Sea l cierto eje y $\overline{AB}$ cierto vector (fig. 19). Designemos por A_1 y B_1 las proyecciones de los puntos A y B sobre el eje l (es decir, las bases de perpendiculares para l trazadas desde A y B). Examinemos el número igual a la longitud del segmento A_1B_1

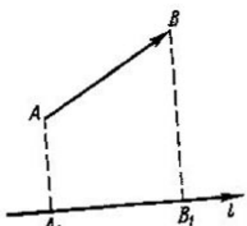


FIG. 19

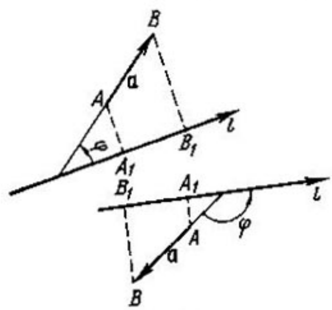


FIG. 20

tomada con signo positivo, si la dirección del vector $\overline{A_1B_1}$ coincide con la del eje l, y tomada con signo negativo en caso inverso. Este número se llama proyección del vector $\overline{AB}$ sobre el eje l y se designa $\mathrm{pr}_l\overline{AB}$.

Sea φ el ángulo formado entre el vector $\mathbf{a}$ y el eje l que se halla entre 0 y π (fig. 20). Es evidente que

$$\mathrm{pr}_l\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos_\varphi. \tag{18}$$

En particular, si $\mathbf{a}$ es perpendicular a l, entonces $\mathrm{pr}_l\mathbf{a} = 0$.

Notemos dos propiedades más de las proyecciones (figs. 21, 22):

1) $\mathrm{pr}_l(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathrm{pr}_l\mathbf{a} + \mathrm{pr}_l\mathbf{b}$,

2) $\mathrm{pr}_l(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\mathrm{pr}_l\mathbf{a}$ (λ es un número arbitrario).

Por lo común estas propiedades se expresan en la forma siguiente: "proyección del vector sobre un eje es una *operación lineal* con vectores". Al aplicar sucesivamente las propiedades 1) y 2) se puede escribir en general:

$$\mathrm{pr}_l(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n) = \\ = \lambda_1 \mathrm{pr}_l \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathrm{pr}_l \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathrm{pr}_l \mathbf{a}_n \qquad (19)$$

para cualesquier vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$ y cualesquier números λ_1, λ_2, ..., λ_n.

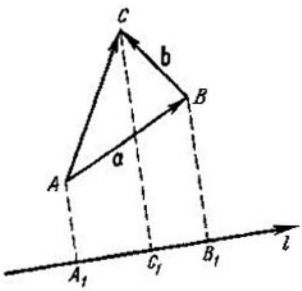


FIG. 21

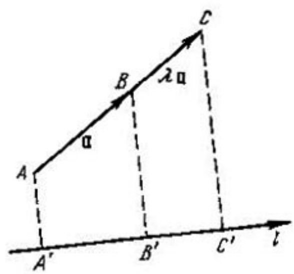


FIG. 22

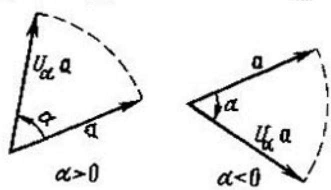


FIG. 23

A propósito, la multiplicación del vector por el número λ también es una operación lineal (véanse (9), (10)).

№ 9. Un ejemplo importante más de operación lineal lo da la operación de rotación del vector en un ángulo dado α (indiferentemente de que sea positivo, negativo o cero). Designemos esta operación por U_α y su resultado de aplicación al vector **a**, por $U_\alpha\mathbf{a}$. De tal modo el vector $U_\alpha\mathbf{a}$ se obtiene del vector **a**, girándolo en el ángulo α. En este caso, evidentemente,

$$|U_\alpha\mathbf{a}| = |\mathbf{a}| \qquad (20)$$

(fig. 23).

Está claro que $U_0\mathbf{a} = \mathbf{a}$, es decir, la operación U_0 no varía el vector. La operación que no varía el vector se llama operación idéntica.

Notemos, además, que

$$U_\pi\mathbf{a} = -\mathbf{a}, \quad U_{2\pi}\mathbf{a} = \mathbf{a}. \tag{21}$$

Como ya hemos dicho la operacion de rotación U_α es lineal:

1) $U_\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = U_\alpha\mathbf{a} + U_\alpha\mathbf{b}$ (fig. 24).

2) $U_\alpha(\lambda\mathbf{a}) = \lambda U_\alpha\mathbf{a}$, donde λ es un número arbitrario (fig. 25).

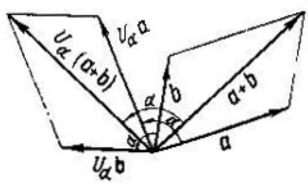


FIG. 24

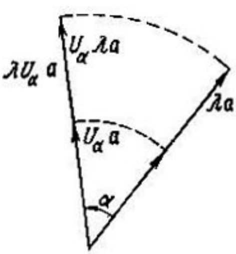


FIG. 25

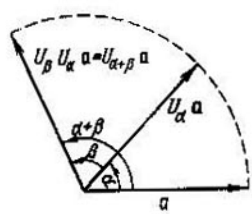


FIG. 26

Por consiguiente, de modo semejante a (19),

$$U_\alpha(\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n) =$$
$$= \lambda_1 U_\alpha\mathbf{a}_1 + \lambda_2 U_\alpha\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n U_\alpha\mathbf{a}_n. \tag{22}$$

№ 10. Sean S, T dos operaciones con vectores (por ejemplo, S es la proyección del vector sobre cierto eje l y T, la rotación del vector en un ángulo recto). El resultado del cumplimiento sucesivo de dos operaciones se llama producto de las operaciones. Además, hablando en general, tiene importancia el orden en que se realizan las operaciones. Si en el ejemplo aducido arriba acerca del par de operaciones S, T se toma el vector $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ que se encuentra en el eje l, a éste se aplica al principio T y luego S, entonces resultará 0; pero si a $\mathbf{a}$ se le aplica al principio S, en este caso se obtendrá un número y al número simplemente no se la puede aplicar la operación T (la operación T se aplica sólo a los vectores).

Si al principio se cumple la operación T y luego la operación S, entonces el producto se escribe en forma de ST. De este modo, según la determinación

$$(ST)\mathbf{a} = S(T\mathbf{a}) \tag{23}$$

para cualquier vector $\mathbf{a}$.

La fig. 26 muestra que $U_\beta U_\alpha \mathbf{a} = U_{\alpha+\beta}\mathbf{a}$ para cualquier vector $\mathbf{a}$, es decir, hablando brevemente [1]:

$$U_\beta U_\alpha = U_{\alpha+\beta}. \tag{24}$$

De aquí se deduce que

$$U_\alpha U_\beta = U_\beta U_\alpha, \tag{25}$$

aunque, en general, $ST \neq TS$.

Si $ST = TS$, se dice que las operaciones S y T son *permutables*. De tal modo, cualesquier dos rotaciones son permutables. También cualquier rotación es permutable con la multiplicación por un número (propiedad № 2 de la operación U_α).

De la fórmula (24) se deduce que

$$U_{-\alpha} U_\alpha = U_0,$$

es decir, $U_{-\alpha} U_\alpha \mathbf{a} = \mathbf{a}$ para cualquier vector $\mathbf{a}$.

Las propiedades de rotaciones y de otras transformaciones geométricas pueden utilizarse con éxito para resolver los problemas más diversos (véase el libro de I. M. Yaglóm, Transformaciones geométricas, I, II, Ed. Gostejizdat, 1955–1956, ed. en ruso).

[1] Las dos operaciones T_1, T_2 con los vectores se consideran iguales si $T_1\mathbf{a} = T_2\mathbf{a}$ para todos los vectores $\mathbf{a}$.

§ 2
ELEMENTOS DE CINEMÁTICA

№ 1. Tomemos sobre el plano un punto cualquier O que será *el polo*. Para un punto arbitrario M el vector $\mathbf{r} = \overline{OM}$ (fig. 27) se llama su *radio vector* respecto al polo O. El punto y su radio vector se determinan uno al otro mutuamente.

Si el punto se mueve describiendo cierta trayectoria (fig. 28), entonces su radio vector varía en dependencia del tiempo; es *función* del tiempo. Esto se designa del modo siguiente:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (t \text{ es el tiempo}). \tag{1}$$

Aquí la palabra "varía" no puede comprenderse al pie de la letra. Un caso particular importante de movimiento es el reposo. Si un punto se encuentra en reposo, entonces su radio vector en todos los momentos de tiempo será el mismo. Como función del tiempo éste permanece invariable "constante". Esto se escribe así:

$$\mathbf{r} = \text{const.} \tag{2}$$

Cuando se dice que, por ejemplo, $\mathbf{r}$ es función de t sólo se tiene en cuenta el hecho de que para cada valor de t el

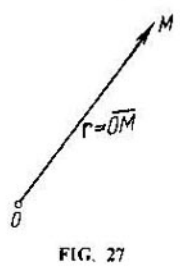


FIG. 27

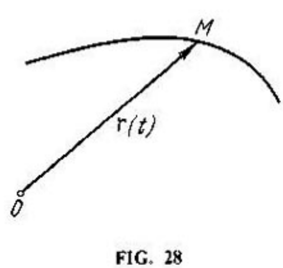


FIG. 28

vector $\mathbf{r}$ está completamente determinado: si t está fijado, entonces $\mathbf{r}$ ya no puede variar.

№ 2. Examinemos cualquier intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ $(t_1 > t_0)$ que empieza en el momento t_0 y termina en el momento t_1. La duración de este intervalo es igual a [1]

$$\Delta t = t_1 - t_0. \qquad (3)$$

Si en el momento t_0 el radio vector del punto movil M es igual a $\mathbf{r}_0$ $(\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0))$ y en el momento t_1 aquél es igual a $\mathbf{r}_1$ $(\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1))$, entonces el vector

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$$

muestra el desplazamiento del punto M durante el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ (fig. 29).

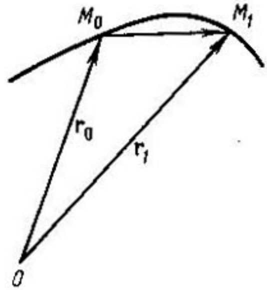


FIG. 29

Ahora queremos introducir el concepto más importante de *velocidad de movimiento*. Al hablar en términos generales, la velocidad es el desplazamiento en unidad de tiempo. Además, la velocidad tiene que describir tanto el valor absoluto de desplazamiento en la unidad de tiempo, como la dirección de este desplazamiento, o sea, la velocidad ha de ser el vector.

Si conocemos que durante un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ el punto M experimentó el desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$, en este caso, para obtener el desplazamiento en la unidad de tiempo es natural dividir $\Delta \mathbf{r}$ entre la duración del intervalo de tiempo. En este caso

---

[1] El signo Δ se usa para designar *el incremento* de cualquier valor, es decir, para indicar en qué cantidad cambió este valor.

se obtiene el vector que se llama *velocidad media del punto durante el intervalo dado de tiempo*:

$$\mathbf{v}_{med} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{4}$$

Este vector está orientado del mismo modo como el vector de desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$, pero su valor absoluto es igual a la distancia M_0M_1, dividida entre Δt, es decir, hablando en términos generales, al trayecto recorrido por el punto en unidad de tiempo.

¿Qué es lo que queremos subrayar con las palábras "hablando en términos generales"? El hecho consiste en que el punto M durante el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ se mueve, como regla, de manera irregular, es decir, durante partes iguales de este intervalo de tiempo el punto recorre trayectos desiguales. Además, éste no se mueve, por lo común, a lo largo de la recta M_0M_1, sino por la curva que une los mismos puntos. El vector de desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$ sólo caracteriza el total de este movimiento, pero no sus etapas intermedias. Lo mismo se refiere también al vector de la velocidad media y esto se subraya mediante la palabra "media".

Sin embargo, es fácil comprender que la velocidad media será una característica bastante precisa del movimiento si la duración del intervalo de tiempo es extremadamente pequeña. Por eso, para obtener la característica ideal y precisa es necesario que el tiempo Δt tienda a cero, es decir, fijando el inicio t_0 del intervalo de tiempo, hacer que t_1 tienda a t_0. En este caso la velocidad media $\mathbf{v}_{med}$ tenderá, hablando en términos generales, hacia cierto límite $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_{med} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{5}$$

En cierto grado esto se muestra en la fig. 30.

El vector $\mathbf{v}$ se llama velocidad (*instantánea*) *del movimiento en el momento* t_0. Su dirección es el límite para las direcciones de vectores de las velocidades medias.

El vector de la velocidad media durante el intervalo $[t_0, t_1]$ se halla sobre la secante M_0M_1. Si t_1 tiende a t_0, entonces el punto M_1 tiende al punto M_0, moviéndose por la trayectoria. Al mismo tiempo, al girar la secante M_0M_1, tiende hacia cierta posición límite M_0T. La recta límite para la secante M_0M_1 se llama *tangente a la trayectoria en el punto* M_0 [1]. El vector de la velocidad en el momento t_0 se halla sobre la tangente a la trayectoria en el punto M_0.

Las palabras "tiende", "límite" y "posición limite" pueden confundir al lector que no está suficientemente preparado. Además,

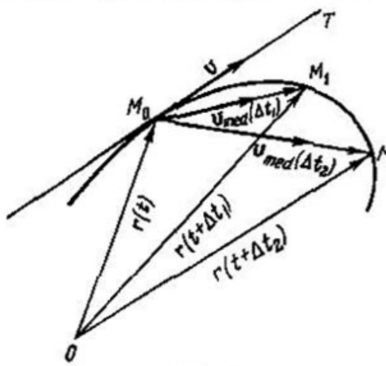


FIG. 30

usamos estas palabras en la aplicación a los vectores variables (e incluso a las rectas variables) y no sólo a los números. En la aplicación a los números variables el lector tiene que conocer el sentido de estas palabras desde el curso escolar de matemáticas en que se exponen los elementos de la teoría de los límites. Pero necesitamos una teoría más general que expongamos ahora en breves palabras.

№ 3. Sea $\rho(s)$ la función del argumento numérico s que toma valores numéricos [2]. Recordamos al lector el sentido preciso de la igualdad

$$\lim_{s \to 0} \rho(s) = 0 \tag{6}$$

[1] Se recomienda al lector comparar esta definición general de la tangente con la definición corriente "escolar" de la tangente hacia la circunferencia.

[2] Tales funciones se llaman *escalares* en contraposición a las *vectoriales*.

y de la frase correspondiente: "la función $\rho(s)$ tiende a cero, si s también tiende a cero". Ellas significan que cualquiera que fuera pequeño el número $\varepsilon > 0$, siempre se encontrará un número tan pequeño $\delta > 0$ que la desigualdad

$$|\rho(s)| < \varepsilon$$

se cumplirá para todos los $|s| < \delta$.

Supongamos ahora que $\mathbf{a}(s)$ es la función vectorial del argumento s. El vector $\mathbf{b}$ se llama *límite* $\mathbf{a}(s)$, cuando s tiende a cero (la anotación: $\mathbf{b} = \lim\limits_{s\to 0}(\mathbf{a}(s))$, si la función escalar

$$\rho(s) = |\mathbf{a}(s) - \mathbf{b}|$$

tiende a cero en presencia de s que tiende a cero.

Los teoremas principales de la teoría de los límites para las funciones vectoriales son análogos a los teoremas para las funciones escalares que el lector conoce.

Teorema 1. *Una misma función no puede tener los límites diferentes* [1].

Demostración. Sea

$$\mathbf{b}_1 = \lim_{s\to 0}\mathbf{a}(s) \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_2 = \lim_{s\to 0}\mathbf{a}(s).$$

Es evidente que

$$\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = [\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}(s)] + [\mathbf{a}(s) - \mathbf{b}_2].$$

De aqui, según la desigualdad del triángulo,

$$|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2| \leqslant |\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}(s)| + |\mathbf{a}(s) - \mathbf{b}_2|.$$

Puesto que ambos sumándos en el segundo miembro de la última desigualdad tienden a cero, cuando $s \to 0$, y el primer miembro de la desigualdad no depende de s, resulta que ésta no puede ser positiva:

$$|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2| \leqslant 0.$$

Pero tampoco puede ser negativa (la longitud del vector siempre es no negativa). Por consiguiente,

$$|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2| = 0.$$

Esto significa que $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = 0$, es decir, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$.

---

[1] Pero puede ser que no tenga ninguno: el límite puede no existir, mas si éste existe, entonces es único.

Teorema 2. *Si*

$$\lim_{s\to 0} \mathbf{a}_1(s) = \mathbf{b}_1, \quad \lim_{s\to 0} \mathbf{a}_2(s) = \mathbf{b}_2,$$

entonces

$$\lim_{s\to 0} (\mathbf{a}_1(s) + \mathbf{a}_2(s)) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

(*"el límite de la suma es igual a la suma de los límites"*).

Teorema 3. *Si*

$$\lim_{s\to 0} \mathbf{a}(s) = \mathbf{b}$$

entonces en presencia de cualquier número fijo λ *será*

$$\lim_{s\to 0} \lambda\mathbf{a}(s) = \lambda\mathbf{b}$$

(*"el límite del producto por un número es igual al producto del límite por este número"*).

Dejamos al cuidado del lector efectuar la demostración de los teoremas 2 y 3[1].

Teorema 4. *Si*

$$\lim_{s\to 0} \mathbf{a}(s) = \mathbf{b},$$

entonces para cualquier ángulo fijo α será

$$\lim_{s\to 0} U_\alpha \mathbf{a}(s) = U_\alpha \mathbf{b}.$$

Demostración. Tenemos (véase § 1, fórmula (20)):

$$\left|U_\alpha \mathbf{a}(s) - U_\alpha \mathbf{b}\right| = \left|U_\alpha(\mathbf{a}(s) - \mathbf{b})\right| = \left|\mathbf{a}(s) - \mathbf{b}\right|.$$

Puesto que, según la condición

$$\lim_{s\to 0} \left|\mathbf{a}(s) - \mathbf{b}\right| = 0,$$

entonces también

$$\lim_{s\to 0} \left|U_\alpha \mathbf{a}(s) - U_\alpha \mathbf{b}\right| = 0,$$

[1] Al demostrar el teorema 2 es conveniente usar la desigualdad del triángulo.

es decir,

$$\lim_{s\to 0} U_\alpha \mathbf{a}(s) = U_\alpha \mathbf{b}.$$

№ **4.** Ahora estamos ya en la condición de exponer, en la forma que necesitamos, la teoría de las velocidades.

La velocidad de un punto se determina mediante la igualdad (5)[1].

Desde el punto de vista físico es evidente el teorema siguiente.

Teorema 5. La velocidad de un punto inmóvil durante todo el tiempo[2] *es igual a cero.*

Demostración. En realidad, si el punto es inmóvil, entonces para cualquier intervalo de tiempo el vector de su desplazamiento es igual a cero, es decir, $\Delta\mathbf{r} = 0$.Por consiguiente, $\mathbf{v}_{med} = \dfrac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = 0$. Pero en este caso también $\mathbf{v} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \mathbf{v}_{med} = 0$ en cada momento de tiempo.

Formulemos el teorema inverso.

Teorema 5'. Si la velocidad de un punto durante todo el tiempo (en transcurso del cual se examina el movimiento de este punto) es igual a cero, entonces el punto permanece inmóvil.

A pesar de toda su evidencia desde el punto de vista de la física, este teorema no resulta tan simple como desde el punto de vista matemático. Para no apartarnos demasiado, omitimos su demostración.

Los teoremas 5 y 5' hablan de que la igualdad

$$\mathbf{r} = \text{const}$$

es equivalente a la igualdad $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Teorema 6. Sean $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *los radios vectores de los puntos* M_1, M_2, M *respectivamente. Si los puntos se mueven*

---

[1] El lector que conoce la diferenciación puede decir: "la velocidad de un punto es la derivada de su radio vector en el tiempo". La diferenciación es una de las operaciones más importantes en las matemáticas. Una formulación de diferenciación accesible para el alumno la contiene el folleto de V. G. Boltianski" ¿Qué es la diferenciación?" Ed. Gostejizdat, 1955, ed. en ruso.

[2] Se entiende que durante el tiempo en que este punto permanece inmóvil.

de tal modo que durante todo el tiempo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2,$$

entonces sus velocidades están ligados mediante la correlación análoga:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \tag{7}$$

Demostración. El vector de desplazamiento del punto M durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ es igual a

$$\Delta\mathbf{r} \doteq \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = [\mathbf{r}_1(t + \Delta t) + \mathbf{r}_2(t + \Delta t)] - \\ - [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = [\mathbf{r}_1(t + \Delta t) - \mathbf{r}_1(t)] + \\ + [\mathbf{r}_2(t + \Delta t) - \mathbf{r}_2(t)] = \Delta\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}_2.$$

De aquí

$$\mathbf{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{r}_1}{\Delta_t} + \frac{\Delta\mathbf{r}_2}{\Delta t} = \mathbf{v}_{1\,\text{med}} + \mathbf{v}_{2\,\text{med}}$$

y por el teorema 2

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_{\text{med}} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_{1\,\text{med}} + \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_{2\,\text{med}} = \\ = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

según se quería probar.

El teorema análogo es justo para la diferencia.

Teorema 6'. Si las velocidades de los puntos M_1, M_2, M todo el tiempo están relacionadas por la correlación (7), entonces durante todo el tiempo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \text{const.} \tag{8}$$

Demostración. Examinemos el punto auxiliar P cuyo radio vector todo el tiempo es igual a

$$\overline{OP} = \mathbf{r} - (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2). \tag{9}$$

Pero entonces la velocidad del punto P es igual, según ha sido demostrado, a $\mathbf{v} - (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$, es decir, es igual a cero. Por consiguiente, el punto P es inmóvil, es decir, $\overline{OP} = \text{const}$. De aquí y de (9) se deduce directamente (8).

De modo análogo a los teoremas 6 y 6' se puede demostrar (con ayuda de los teoremas 3, 4) los pares siguientes de teoremas.

Teorema 7. Sean $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ los radios vectores de los puntos M_1 y M_2 respectivamente. Si los puntos se mueven de tal *modo que durante todo el tiempo*

$$\mathbf{r}_2 = \lambda \mathbf{r}_1,$$

donde λ *es un número constante, entonces sus velocidades están ligadas por la correlación análoga*

$$\mathbf{v}_2 = \lambda \mathbf{v}_1. \tag{10}$$

Teorema 7'. Si las velocidades de los puntos M_1, M_2 *durante todo el tiempo están ligadas mediante la correlación* (10) *entonces durante todo el tiempo*

$$\mathbf{r}_2 = \lambda \mathbf{r}_1 + \text{const.}$$

Teorema 8. *Sean* $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ *los radios vectores de los puntos* M_1 *y* M_2 *respectivamente. Si los puntos se mueven de tal modo que durante todo el tiempo.*

$$\mathbf{r}_2 = U_\alpha \mathbf{r}_1,$$

donde α es un ángulo constante, entonces sus velocidades están ligadas mediante la correlación análoga

$$\mathbf{v}_2 = U_\alpha \mathbf{v}_1. \tag{11}$$

Teorema 8'. Si las velocidades de los puntos M_1, M_2 *todo el tiempo están ligadas mediante la correlación* (11), *entonces durante todo el tiempo*

$$\mathbf{r}_2 = U_\alpha \mathbf{r}_1 + \text{const.}$$

№ 5. Sea $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ el radio vector del punto móvil M. Examinemos el desplazamiento $\overline{M_0M_1} = \Delta\mathbf{r}$ del punto durante cierto intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ (fig. 31). Tracemos el arco de la circunferencia cuyo centro está en el polo O y el radio OM_0. Este intersecará el rayo OM_1 en el punto M^*. Es evidente que

$$\Delta\mathbf{r} = \overline{M_0M_1} = \overline{M_0M^*} + \overline{M^*M_1}. \tag{12}$$

El desplazamiento $\overline{M_0M^*}$ no varía la distancia del punto móvil M a partir del polo O y está ligado solamente con la rotación del rayo OM. El desplazamiento $\overline{M^*M_1}$ está ligado solamente con la variación de la distancia del punto M a partir del polo.

Al dividir ambos miembros de la igualdad (12) entre $\Delta t = t_1 - t_0$ y pasando al límite, cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M_0M^*}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M^*M_1}}{\Delta t}. \tag{13}$$

El primero de los límites que figura en el segundo miembro de la igualdad (13) se llama *velocidad transversal* del punto M y se designa $\mathbf{v}_\tau$, el segundo se llama *velocidad radial* del punto M y se designa $\mathbf{v}_\rho$.

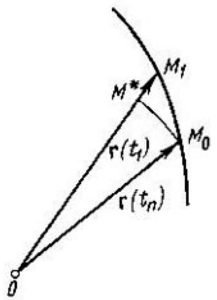


FIG. 31

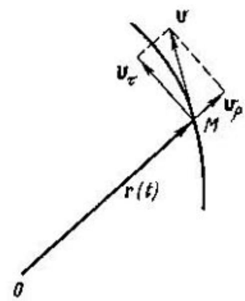


FIG. 32

De este modo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}_\rho. \tag{14}$$

La fórmula (14) da la descomposición del vector de velocidad en las componentes radial y transversal (fig. 32). Estas componentes son mutuamente perpendiculares.

Velocidad radial es la velocidad de variación de la distancia del punto M a partir del polo O, es decir, la velocidad de variación de la longitud del radio vector $\overline{OM}$. La velocidad está dirigida a lo largo de este vector si OM crece, y en dirección contraria, si OM decrece.

Designemos la proyección del vector de velocidad del punto M sobre el eje, definida por el vector $\overline{OM}$, mediante v_ρ. Es evidente que

$$v_\rho = \pm \left|\mathbf{v}_\rho\right|,$$

donde el signo más se toma en caso de crecimiento de OM y el signo menos, en caso de decrecimiento del mismo.

Si el punto M se mueve por la circunferencia cuyo centro está en el polo, entonces su velocidad total coincide con la transversal:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\tau, \quad \mathbf{v}_\rho = 0.$$

Pero si el punto se mueve por el rayo que parte del polo, entonces su velocidad total coincide con la radial:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\rho, \quad \mathbf{v}_\tau = 0.$$

№ 6. Examinemos la rotación del rayo OM alrededor de su punto inicial O. Supongamos que durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ el rayo giró en un ángulo[1] $\Delta\varphi$. La relación

$$\omega_{\text{med}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

se llama *velocidad angular media* del rayo durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$. El límite de la velocidad angular media ω_{med}, cuando $\Delta t \to 0$, se llama *velocidad angular* (*instantánea*) del rayo y se designa simplemente con ω:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{\text{med}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

La velocidad angular no es un vector, sino un número[2]. Es positiva si el rayo gira en dirección positiva, y negativa si el rayo gira en dirección negativa.

Para las velocidades angulares son válidos los teoremas siguientes, análogos a los teoremas sobre las velocidades de los puntos.

Teorema 9. *La velocidad angular del rayo todo el tiempo es igual a cero si, y sólo si el rayo todo el tiempo permanece inmóvil.*

Teorema 10. *Las velocidades angulares de dos rayos*[3] O_1M *y* O_2M *todo el tiempo son iguales si, y sólo si el ángulo entre los rayos permanece constante.*

---

[1] Este ángulo puede tener cualquier signo.

[2] Para los movimientos no coplanares la velocidad angular se introduce más complicadamente y allí resulta ser una magnitud vectorial.

[3] O_1, O_2 son los puntos inmóviles cualesquiera (pueden ser también coincidentes).

§ 3
MÉTODO CINEMÁTICO EN LOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Ahora podemos empezar, estando fuertes en conocimientos, a resolver los problemas de geometría. Ante todo recomendemos analizar otra vez la solución cinemática del "problema del buscador de tesoro" dada en la introducción. A la par con esto es necesario observar cómo se usa el material de los §§ 1 y 2, con la finalidad de prepararse mejor para resolver los problemas siguientes.

Problema 1 [1]. *En los lados de un triángulo arbitrario ABC por fuera de éste están construidos los triángulos equiláteros ABC', BCA' y ACB'* (fig. 33) *Demostrar que los centros O^1, O^2 y O^3 de estos triángulos son los mismos vértices del triángulo equilátero.*

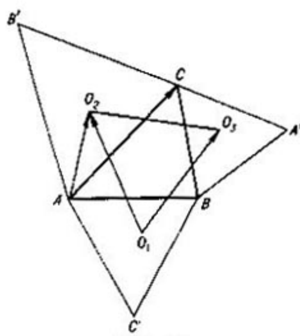


FIG. 33

Resolución. Fijemos los vértices A y B del triángulo ABC y movamos el vértice C. Sea $\mathbf{v}_C$ su velocidad. En este caso el triángulo ABC' permanecerá invariable y los vértices A' y B' de los

---

[1] Este problema, al igual que la mayoría de los problemas aducidos abajo, está tomado desde la serie de libros "Biblioteca del círculo matemático" de I. M. Yaglóm y otros. Algunos problemas se tomaron del libro de Zh. Adamar "Geometría elemental", t. 1, Ed. Uchpedguiz, 1948, ed. en ruso.

triángulos equilateros $A'BC'$ y $AB'C$ se moverán de un modo determinado. Examinemos los vectores $\overline{AC}$ y $\overline{AO_2}$. Es evidente que

$$AO_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} AC.$$

Además, el ángulo entre los vectores $\overline{AC}$ y $\overline{AO_2}$ es igual a $\frac{\pi}{6}$.

Por eso si giramos el vector AC en el ángulo $\frac{\pi}{6}$ (de modo que con esto su longitud no varíe) y multiplicamos el vector obtenido por $\frac{1}{\sqrt{3}}$, entonces obtendremos el vector AO_2. Esto se puede escribir del modo siguiente:

$$\overline{AO_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{\frac{\pi}{6}} \overline{AC}.$$

Según el teorema 8

$$\mathbf{v}_{O_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{\frac{\pi}{6}} \mathbf{v}_C$$

($\mathbf{v}_{O_2}$ es la velocidad del punto O_2).

De modo análogo

$$\mathbf{v}_{O_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{-\frac{\pi}{6}} \mathbf{v}_C$$

De aquí

$$\mathbf{v}_C = \sqrt{3}\, U_{\frac{\pi}{6}} \mathbf{v}_{O_3}.$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_{O_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3}\, U_{\frac{\pi}{6}} \mathbf{v}_{O_3} = U_{\frac{\pi}{6}} U_{\frac{\pi}{6}} \mathbf{v}_{O_3} = U_{\frac{\pi}{3}} \mathbf{v}_{O_3}. \qquad (1)$$

Tomemos ahora el punto inmóvil O_1 por el polo. Entonces de la igualdad (1), según el teorema 8', resulta

$$\overline{O_1O_2} = U_{\frac{\pi}{3}} O_1O_3 + \mathbf{R},$$

donde el vector $\mathbf{R} = \text{const}$, es decir, $\mathbf{R}$ no depende de la posición del punto móvil C. El vector $\mathbf{R}$ no se conoce, pero se puede encontrar al elegir cualquiera de las posiciones del punto C que brevemente llamaremos en ulterior como *posición determinante*. Si resulta que en la posición determinante del punto C el vector $\mathbf{R}$ es igual a cero, entonces, siendo constante, siempre será igual a cero, es decir, siempre

$$\overline{O_1O_2} = U_{\frac{\pi}{3}}\overline{O_1O_3}. \qquad (2)$$

Pero esto precisamente significa que el triángulo $O_1O_2O_3$ siempre es equilátero!

En realidad, en (2) se dice que el segmento O_1O_2 se obtiene del segmento O_1O_3, girando en un ángulo $\frac{\pi}{3}$.

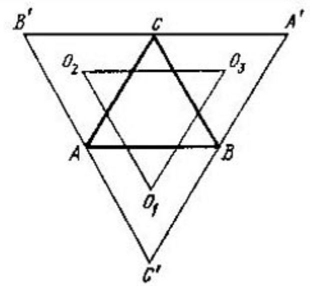


FIG. 34

Nos queda hallar la posición determinante conveniente del punto C. Es oportuno elegirla de tal modo que toda la configuración sea lo más sencilla posible. En el problema dado la configuración tendrá un aspecto muy simple (fig. 34) si el punto C ocupa tal posición en la que el triángulo ABC es equilátero. Aquí tiene lugar la simetría: la configuración coincide con sí misma al girar el triángulo ABC alrededor del centro en un ángulo $\frac{2}{3}\pi$.

Por eso el triángulo $O_1O_2O_3$ resulta equilátero y, por consiguiente,

$$\overline{O_1O_2} = U_{\frac{\pi}{3}}\overline{O_1O_3},$$

es decir, en esta posición realmente $\mathbf{R} = 0$.

Ejercicios. 1. Demostrar que la afirmación del problema 1 es válida, si los triángulos ABC', BCA', ACB' son sustituidos por los triángulos

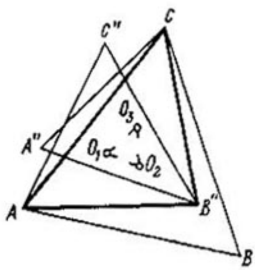


FIG. 35

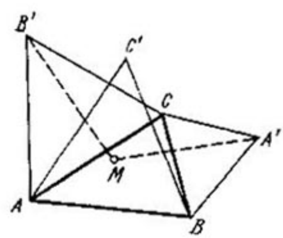


FIG. 36

ABC'', BCA'', ACB'', simétricos a aquellos con respecto a los lados del triángulo ABC (fig. 35).

2. En los lados de un triángulo arbitrario ABC están construidos los triángulos equiláteros BCA', ACB', ABC' de tal modo que los vértices

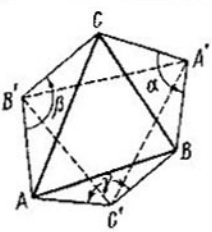


FIG. 37

A' y A, B' y B están situados respectivamente por los diferentes lados de BC y AC, mientras que C' y C se hallan por el lado de AB (fig. 36). Demostrar que si el punto M es el centro del triángulo ABC', entonces el triángulo $A'MB'$ es isósceles y el ángulo en su vértice M es igual a $\frac{2}{3}\pi$.

3. Sobre los lados de un triangulo arbitrario ABC y fuera del mismo están construidos los triángulos isósceles BCA', ACB' y ABC' con los ángulos en los vértices A', B' y C' respectivamente iguales a α, β y γ (fig. 37). Demostrar que si

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi,$$

entonces los ángulos del triángulo $A'B'C'$ son iguales a $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$, es decir, no dependen de la forma del triángulo ABC. Un caso particular de esta afirmación se conoce como "el problema de Napoleon" (véase la revista "Kvant" ("Cuanto") 1972, № 6, pág. 29, ed en ruso).

Problema 2. Sea dado un cuadrángulo $ABCD$. Por fuera de sus lados están construidos los triángulos rectángulos isósceles ABM,

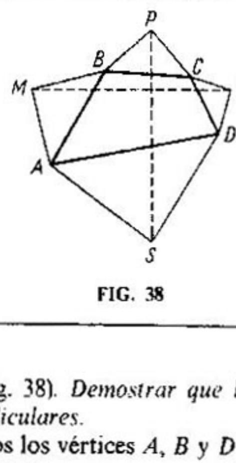


FIG. 38

BCP, CDQ y DAS (fig. 38). *Demostrar que los segmentos MQ y SP son iguales y perpendiculares.*

Resolución. Fijemos los vértices A, B y D y comencemos a mover el vértice C. Puesto que

$$\overline{BP} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}} \overline{BC},$$

resulta que

$$v_P = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}} v_C$$

De modo análogo

$$\mathbf{v}_Q = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}} \mathbf{v}_C$$

Al pasar de la correlación entre las velocidades a la correlación entre los radios vectores obtenemos:

$$\overline{SP} = U_{\frac{\pi}{2}} \overline{SQ} + \text{const}$$

Puesto que $\overline{SQ} = \overline{SM} + \overline{MQ}$ y $SM = \text{const}$, entonces

$$\overline{SP} = U_{\frac{\pi}{2}} \overline{MQ} + \mathbf{R},$$

donde $\mathbf{R} = \text{const}$.

Elijamos la posición determinante del vértice C. Por ejemplo, hagamos que coincida con el vértice A. Después de esto el cuadrángulo $ABCD$ se transformará en dos pares de segmentos concurrentes $AB = CB$ y $AD = CD$ (fig. 39). Los triángulos ABM y CBP forman un cuadrado construido sobre AB como en diagonal. De modo análogo los triángulos ADS y CDQ forman el cuadrado con diagonal AD. De aquí se deduce que mediante la rotación en

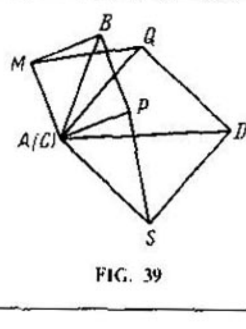


FIG. 39

$\frac{\pi}{2}$ el triángulo ASP coincide con el triángulo AQM (en este caso el punto S coincide con el punto Q y el punto P con el punto M). Por eso para la situación examinada del punto C

$$\overline{SP} = U_{\frac{\pi}{2}} \overline{MQ}.$$

De este modo aquí, y esto significa que siempre,

$$\mathbf{R} = \mathbf{0},$$

es decir, siempre

$$\overline{SP} = U_{\frac{\pi}{2}} \overline{MQ}.$$

Pero esta igualdad dice de que el segmento SP siempre se obtiene del segmento MQ mediante el giro en ángulo recto Por consiguiente,

$$SP = MQ, \quad SP \perp MQ.$$

Problema 3. En los lados de un paralelogramo arbitrario $ABCD$ por fuera de éste, están construidos cuadrados. Demostrar que sus centros M, P, Q y S son los mismos vértices del cuadrado (fig. 40).

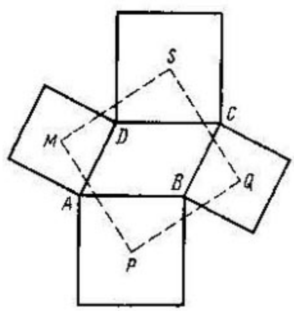


FIG. 40

Resolución. Fijemos los puntos A y D y empecemos a mover el segmento BC paralelamente a sí mismo En este caso los puntos B y C se desplazarán con una misma velocidad. Esta misma velocidad tendrá también el punto Q que es el centro del cuadrado [11] construido sobre el segmento BC.

[11] Todo el cuadrado se moverá, como se dice, en forma de traslación.

Calculemos la velocidad del punto S que es el centro del cuadrado construido sobre el segmento CD. Puesto que

$$\overline{DS} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}} \overline{DC},$$

entonces

$$\mathbf{v}_S = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}} \mathbf{v}_C$$

De modo análogo

$$\mathbf{v}_P = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{-\frac{\pi}{4}} \mathbf{v}_B$$

Puesto que

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_Q,$$

entonces

$$\mathbf{v}_S = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}} \mathbf{v}_Q, \quad \mathbf{v}_P = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{-\frac{\pi}{4}} \mathbf{v}_Q$$

Por consiguiente,

$$\overline{MS} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}} \overline{MQ} + \mathbf{R}_1, \quad \overline{MP} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{-\frac{\pi}{4}} MQ + \mathbf{R}_2,$$

donde

$$\mathbf{R}_1 = \text{const}, \quad \mathbf{R}_2 = \text{const}.$$

En calidad de determinante tomemos aquella posición del segmento BC en la que el cuadrángulo $ABCD$ es un cuadrado. Entonces resultará que

$$\mathbf{R}_1 = 0, \quad \mathbf{R}_2 = 0.$$

De este modo, ya no solamente en esta posición, sino también siempre

$$\overline{MS} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{\pi}{4}} \overline{MQ}, \quad \overline{MP} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{-\frac{\pi}{4}} MQ,$$

y estas igualdades significan que el cuadrángulo $MPQS$ es un cuadrado.

Ejercicios 4. Demostrar que la afirmación del problema 3 se conservará si todos los cuadrados se sustituyen por los simétricos a éstos con respecto a los lados del paralelogramo $ABCD$.

5. Se da el cuadrángulo $ABCD$ Demostrar que si los vertices P y S de los triángulos rectángulos isósceles ABP y CDS coinciden entre sí, entonces coincidirán también los vértices Q y T de los triángulos rectángulos isósceles BCQ y DAT (fig. 41). Todos los triángulos se construyen dentro del cuadrángulo $ABCD$.

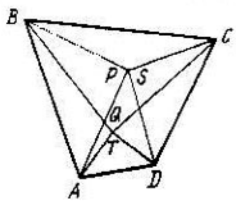


FIG. 41

6. Se da el cuadrángulo $ABCD$. Sobre los lados BC y DA por fuera y en los lados AB y CD por dentro del cuadrángulo están construidos los triángulos rectángulos isósceles ABP, BCQ, CDS, DAT (fig. 42). Demostrar que si los vértices P y S coinciden, el segmento QT pasa por ellos, siendo dividido en dos partes iguales.

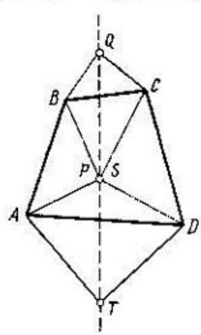


FIG. 42

7. Demostrar que en el problema 1 los segmentos AA', BB' y CC' son iguales y, al intersecarse en un punto, forman ángulos iguales a $\frac{2}{3}\pi$.

Problema 4. Se dan cuatro rectas a, b c y d, que se intersecan por pares en seis puntos A, B, C, D, E y F (fig. 43). *Demostrar que los centros M, P y Q de los segmentos AC, BE y DF se encuentran sobre una recta.*

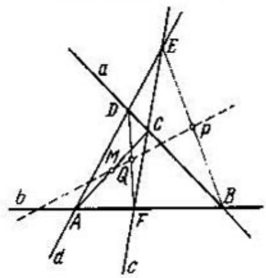


FIG. 43

Resolucion. Fijemos las rectas b, c, d y empecemos a desplazar la recta a paralelamente a sí misma. En este caso los puntos B, C y D se moverán según las rectas b, c y d. Sus velocidades los designaremos $\mathbf{v}_B$, $\mathbf{v}_C$ y $\mathbf{v}_D$.

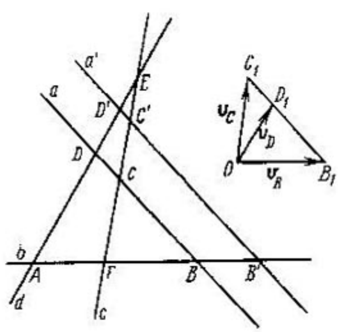


FIG. 44

Sea a' la posición desplazada de la recta a y B', C' y D' las posiciones desplazadas de los puntos B, C y D (fig. 44).

Los orígenes y los extremos de los vectores $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ se hallan respectivamente sobre las rectas paralelas a y a'. Por consiguiente, si hacemos coincidir los orígenes de estos vectores, entonces sus extremos se hallarán en una recta paralela a a. Los vectores $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ son proporcionales a las velocidades $\mathbf{v}_B$, $\mathbf{v}_C$ y $\mathbf{v}_D$ de los puntos B, C y D. Por eso, si los vectores $\mathbf{v}_B$, $\mathbf{v}_C$ y $\mathbf{v}_D$ se trazan a partir de cierto punto O, entonces sus extremos B_1, C_1 y D_1 se hallarán sobre una recta (paralela a la recta a). De aquí se deduce según el teorema del § 1 № 7, que existen tales números constantes m y n para los cuales

$$\mathbf{v}_B = \frac{m\mathbf{v}_C + n\mathbf{v}_D}{m + n} \tag{3}$$

El punto M (véase fig. 43) es la mitad del segmento AC, es decir, $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Puesto que el punto A es inmóvil, de aquí se deduce que

$$\mathbf{v}_M = \frac{1}{2}\mathbf{v}_C. \tag{4}$$

De modo análogo obtenemos las igualdades

$$\mathbf{v}_Q = \frac{1}{2}\mathbf{v}_D, \quad \mathbf{v}_P = \frac{1}{2}\mathbf{v}_B. \tag{5}$$

En virtud de (3) – (5)

$$\mathbf{v}_P = \frac{m\mathbf{v}_M + n\mathbf{v}_Q}{m + n}.$$

Tomemos ahora el punto inmóvil E por un polo. Entonces, en forma sucesiva, aplicando los teoremas 6' y 7' tendremos:

$$\overline{\mathrm{EP}} = \frac{m\overline{\mathrm{EM}} + n\overline{\mathrm{EQ}}}{m + n} + \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \mathrm{const} \tag{6}$$

Supongamos que la recta a en la posición determinante pasa a través del punto E (fig. 45). En esta posición los puntos D y C coinciden con el punto E. Los puntos M, Q y P resultan ser las mitades de los segmentos AR, FE y BE. Puesto que los puntos A, F y B se hallan sobre una recta, resulta que los puntos M, Q y P también se encontrarán en una recta (paralela a b). Los triángulos PEQ y B_1C_1O son semejantes (los lados de uno son paralelos a los lados del otro: $PE \parallel a \parallel B_1C_1$; $PQ \parallel b \parallel OB_1$; $EQ \parallel c \parallel OC_1$)

De modo analogo son semejantes los triángulos PEM y B_1D_1O. De la similitud de los triángulos se deduce que

$$\frac{B_1D_1}{OB_1} = \frac{PE}{MP}, \quad \frac{C_1B_1}{OB_1} = \frac{PE}{PQ},$$

De aquí que

$$\frac{MP}{PQ} = \frac{C_1B_1}{B_1D_1},$$

es decir, los puntos P y B_1 dividen los segmentos MQ y C_1D_1 respectivamente en una misma relación. Pero para el punto B_1

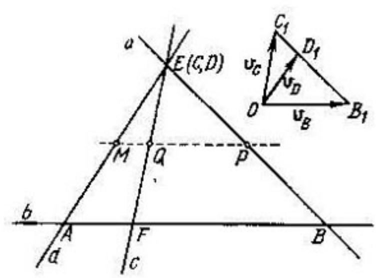


FIG. 45

esta relación es igual a $m:n$. Por consiguiente, también para el punto P será igual a $m:n$, de donde

$$\overline{EP} = \frac{m\overline{EM} + n\overline{EQ}}{m+n}. \tag{7}$$

Al comparar las igualdades (6) y (7) vemos que en la posición determinante $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Pero puesto que $\mathbf{R} = \text{const}$, entonces siempre $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Esto significa que siempre tiene lugar la igualdad (7) y los puntos M, P, Q siempre se hallan sobre una recta.

Ejercicio 8. Demostrar que los puntos de intersección de los vértices de cuatro triangulos BCD, ABE, DEF y ACF formados por cuatro rectas

a, b, c y d, que se intersecan por pares, se encuentran en una recta (fig. 46).

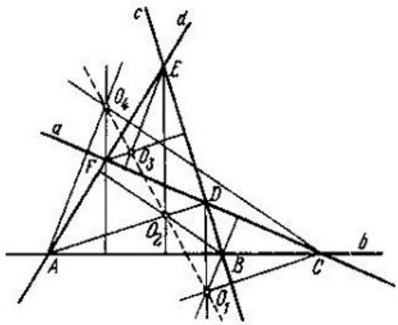


FIG. 46

Problema 5. Supongamos que el punto P se encuentra sobre la circunferencia K descrita alrededor del triángulo ABC, y que P_1, P_2, P_3 son las proyecciones del punto P sobre los lados del ΔABC

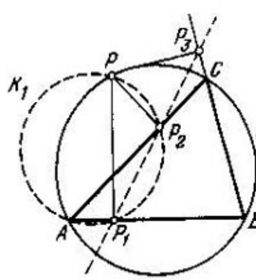


FIG. 47

(fig. 47). *Demostrar que los puntos P_1, P_2, P_3 se hallan sobre una recta (llamada recta de Simpson, la cual corresponde al punto P y al triángulo ABC).*

Resolución. Hagamos girar los lados AC y BC alrededor de los puntos A y B con una misma velocidad angular ω. En este caso el punto C se desplaza por la circunferencia[1] K. Puesto que los ángulos PP_1A y PP_2A son rectos, resulta que el punto P_2 se mueve por la circunferencia K_1 que pasa por los puntos inmóviles A, P y P_1. En este caso el rayo PP_2, siendo todo el tiempo perpendicular al rayo AC, gira alrededor del punto P con la misma velocidad angular (según el teorema 10 § 2). Puesto que los rayos PP_2 y P_1P_2 giran de tal modo que el punto P_2 de su intersección se mueve por la circunferencia K_1, entonces el ángulo formado

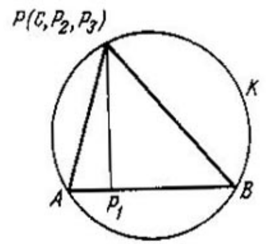


FIG. 48

por ellos es constante. Por consiguiente, según el teorema 10 sus velocidades angulares son iguales. Por eso la velocidad angular del rayo P_1P_2 es igual a ω. De modo análogo ω es la velocidad angular del rayo P_1P_3.

De esta forma los rayos P_1P_2 y P_1P_3 giran con una misma velocidad angular. Por eso el ángulo formado por ellos es constante. Para detectar que el ángulo es igual a cero (y con eso concluye la demostración) examinemos la posición en que el punto C coincide con el punto P (fig. 48). En esta posición P_2 coincide con P_3 (y con P y C) y el ángulo examinado es igual a cero. Esto significa que éste siempre es igual a cero.

[1] En realidad, puesto que las velocidades angulares de los rayos AC y BC son iguales entre si, entonces, según el teorema 10, el ángulo ACB permanece todo el tiempo constante y, por consiguiente, el punto C se mueve por el arco de la circunferencia K.

Ejercicios. **9.** Supongamos que los puntos P y Q se encuentran sobre la circunferencia K descrita alrededor del triángulo ABC. Demostrar que el punto de intersección de las rectas correspondientes de Simpson p y q

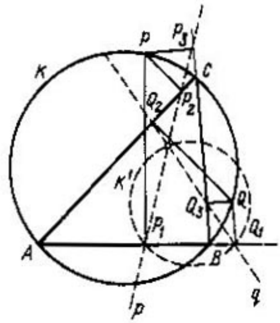


FIG. 49

(fig. 49) describe la circunferencia K' durante el movimiento del punto C por la circunferencia K (los puntos A, B, P y Q se consideran inmóviles).

10. Supongamos que el punto P se encuentra sobre la circunferencia K descrita alrededor del triángulo ABC y que P_1, P_2, P_3 son los puntos simétricos con el punto P respecto a los lados del triángulo ABC. Demostrar que los puntos P_1, P_2 y P_3 están sobre la recta que pasa por el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC (fig. 50).

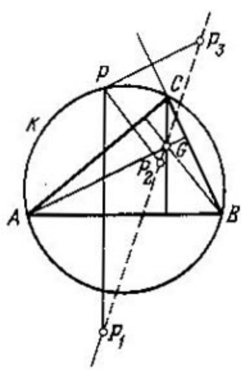


FIG. 50

Problema 6. Demostrar que las cuatro circunferencias K_1, K_2, K_3 y K_4 descritas alrededor de cuatro triángulos ABD, BFC, CED y AFE, formados por las cuatro rectas a, b, c y d, que se intersecan por pares y pasan por un punto (fig. 51).

Resolución. Puesto que las circunferencias K_1 y K_2 tienen un punto común B, resulta que tienen además un punto común [1]. Designémoslo por M. Demostremos que M pertenece también a K_3 y K_4.

Fijemos los puntos B, C y D y empecemos a girar alrededor de éstos las rectas b, c y d con una misma velocidad angular ω. Puesto que el ángulo BAD en esta operación permanece constante (véase el teorema 10 § 2), resulta que el punto A de intersección de las rectas b y d se desplazará por la circunferencia K_1. De modo análogo punto F de intersección de las rectas b y c se moverá por la circunferencia K_2 y el punto E de intersección de las rectas c y d, por la circunferencia K_3.

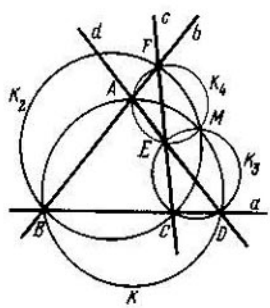


FIG. 51

En cierto momento de tiempo el punto A coincidirá con el punto M (véase fig. 52, *a*) y, por consiguiente, por M pasarán las rectas b y d. Puesto que M pertenece también a K_2 y la recta b se interseca en K_2 con la recta c, resulta que en este momento por el punto M pasarán las tres rectas b, c y d. Pero el punto de

[1] Si el punto B fuera el punto de tangencia de las circunferencias K_1 y K_2, entonces los triángulos ABD y BFC serían semejantes. En este caso las rectas AD y FC han de ser paralelas, lo que contradice la condición.

intersección de las rectas c y d pertenece a la circunferencia K_3. De aquí se deduce que la circunferencia K_3 pasa por la recta M.

Para demostrar que por el punto M pasa también la circunferencia K_4 fijemos los puntos B, A y F y empecemos a girar alrededor de éstos las rectas a, d y c con una misma velocidad angular (fig. 52, b). De manera análoga a lo anterior demostremos que en cierto momento las tres rectas a, d y c pasarán por el punto M. Esto significa que por el punto M pasa también la circunferencia K_4 en la que se intersecan las rectas c y d.

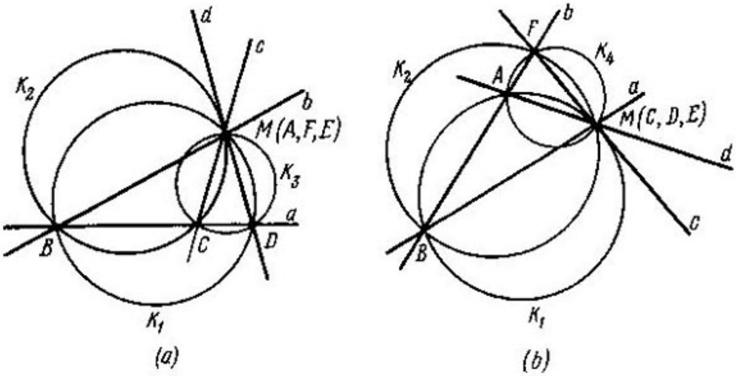


FIG. 52

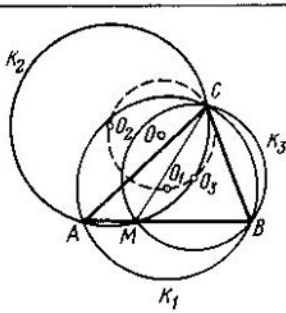


FIG. 53

Ejercicios. **11.** Sobre el lado AB del triángulo ABC se toma un punto arbitrario M. Demostrar que los centros O_1, O_2 y O_3 de las circunferencias descritas alrededor de los triángulos ABC, AMC y BMC se encuentran sobre la circunferencia que pasa por el punto C (fig. 53).

12. Teorema de Steiner. Demostrar que los centros de las circunferencias K_1, K_2, K_3 y K_4 (véanse la condición del problema 6) se encuentran sobre una circunferencia. Esta circunferencia pasa también por el punto de intersección de las circunferencias K_1, K_2, K_3 y K_4 (fig. 54).

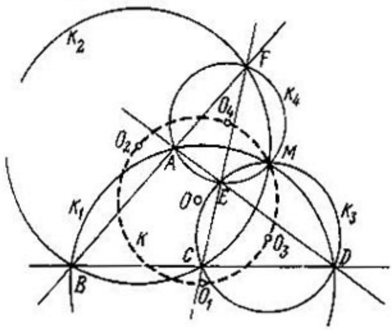


FIG. 54

Problema 7. Sean dadas dos cicunferencias K_1 y K_2 (fig. 55) *que se intersecan en los puntos A y B. El punto M que se mueve por la circunferencia K_1 está unido con los puntos A y B. Supongamos que N y P son los puntos de intersección de las rectas MA y MB*

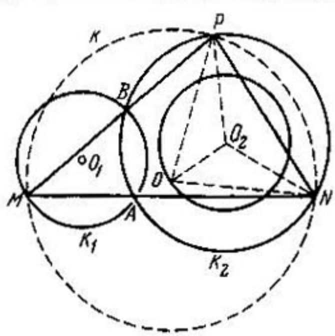


FIG. 55

con la circunferencia K_2. Demostrar que el centro O de la circunferencia K descrita alrededor del triángulo MNP, describe la circunferencia.

Resolución. Durante el movimiento del punto M por la circunferencia K_1 los rayos AN y BP giran alrededor de los puntos A y B con una misma velocidad angular ω. Las velocidades angulares de los radios O_2N y O_2P trazados desde el centro O_2 de la circunferencia K_2 a los puntos N y P son iguales[1] a 2ω. De aqui se deduce que el ángulo PO_2N es constante y el triángulo PO_2N se mueve, permaneciendo invariable. Puesto que la longitud de la cuerda PN y el ángulo PMN son constantes, la circunferencia K descrita alrededor del triángulo MNP se mueve, permaneciendo invariable. Junto con su centro O y la cuerda PN se mueve, también el triángulo PON permaneciendo invariable. De aquí se deduce que también se mueve, permaneciendo invariable, el triángulo O_2ON. Puesto que su vértice O_2 está inmóvil, resulta que el punto O describe la circunferencia.

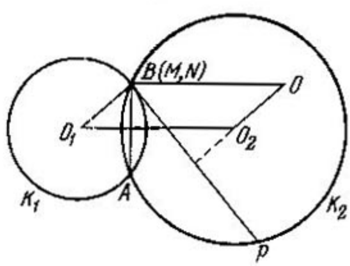


FIG. 56

Demostremos que el radio de esta circunferencia es igual al radio de la circunferecnia K_1. Para esto hagamos coincidir el punto M con el punto B (fig. 56). En este caso la secante MBP se transformará en la tangente a la circunferencia K_1 en el punto B (véase № 2, § 2). La cuerda MA coincidirá con la cuerda AB y el punto N coincidirá con el punto B. El triángulo MNP "se degenerará" en el segmento BP (dos veces cubierto). El centro O

[1] En realidad, supongamos que durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ el rayo AN gira en cierto ángulo NAN'. Durante este mismo intervalo de tiempo el radio O_2N girará en el ángulo NO_2N' que siendo central, es igual al ángulo duplicado inscrito NAN'. Puesto que la correlación $\angle NO_2N' = 2\angle NAN'$ tiene lugar para cualquier Δt, resulta que la velocidad angular del radio O_2N es igual a la velocidad angular duplicada del rayo AN.

de la circunferencia descrita alrededor de aquél, se halla en el punto de intersección de la perpendicular que pasa por el centro de la cuerda BP y la perpendicular trazada por el punto B[1] de la cuerda AB. De aquí se deduce que el cuadrángulo O_1O_2OB es el paralelogramo y $O_2O = R_1$.

De tal modo el punto O describe la circunferencia con el centro en el punto O_2 y el radio R_1.

Ejercicios. **13.** Demostrar que el lado PN del triángulo MNP (véase la condición del problema 7) toca cierta circunferencia fija.

14. Demostrar que el punto de intersección de las alturas del triángulo MNP construido en el problema 7, describe una circunferencia durante el movimiento del punto M.

En conclusión examinemos algunas propiedades de la elipse, la hipérbola y la parábola. Las definiciones de estas curvas se darán más abajo.

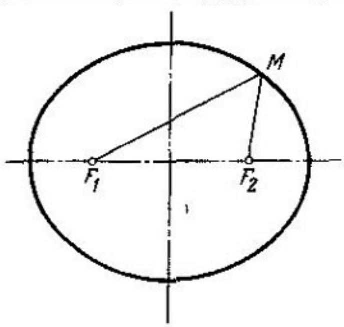


FIG. 57

Llámase *elipse* la curva formada por todos los puntos cuya suma de las distancias a dos puntos dados F_1 y F_2 es igual a un valor constante prefijado (fig. 57). Los puntos F_1 y F_2 se llaman *focos* de la elipse.

[1] El lado MN del triángulo MNP se degeneró en el punto, pero la dirección de este lado degenerado se determina durante el paso al límite y coincide con la dirección de la cuerda AB.

Problema 8. Demostrar que la tangente a la elipse forma ángulos iguales con los radios vectores que parten de los focos al punto de tangencia y viceversa, si la tangente a la curva forma en cada punto ángulos iguales con los radios vectores que parten de dos puntos fijos F_1 y F_2 al punto de tangencia, entonces esta curva es elipse con focos en los puntos F_1 y F_2 (o el arco de la elipse indicada).

Resolución. Supongamos que el punto M se mueve por la elipse con la velocidad $\mathbf{v}$. Las proyecciones del vector $\mathbf{v}$ sobre los radios

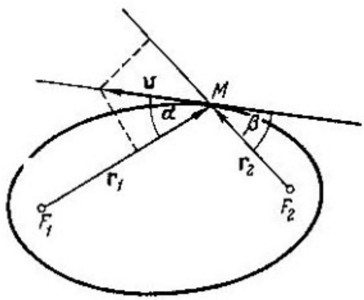


FIG. 58

vectores[1] $\mathbf{r}_1 = \overline{F_1M}$ y $\mathbf{r}_2 = \overline{F_2M}$ (fig. 58) son respectivamente iguales a

$$v_1 = \mathrm{pr}_{\mathbf{r}_1}\mathbf{v} = -v\cos\alpha, \quad v_2 = \mathrm{pr}_{\mathbf{r}_2}\mathbf{v} = v\cos\beta, \tag{8}$$

donde α y β son los ángulos formados por $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y la tangente. Puesto que, según la definición de la elipse $|\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2| = \text{const}$, entonces[2]

$$v_1 + v_2 = 0.$$

[1] Es decir, sobre los ejes dirigidos a lo largo de estos vectores

[2] Puesto que suma $|\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2|$ es un valor constante, resulta que los incrementos de las longitudes de vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son iguales por su valor absoluto y tienen signos opuestos. Por consiguiente, también las velocidades de variación de las longitudes de vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son iguales por su valor absoluto y tienen signos opuestos. Según № 5 § 2 estas velocidades son precisamente v_1 y v_2.

Al introducir aquí las expresiones para v_1 y v_2 desde (8) obtenemos

$$v\cos\alpha - v\cos\beta = 0,$$

o

$$\cos\alpha = \cos\beta,$$

de donde $\alpha = \beta$, puesto que α y β son los ángulos agudos.

Al contrario, supongamos que la tangente a la curva L forma ángulos iguales con los radios vectores que llegan al punto de tangencia a partir de los puntos fijos F_1 y F_2. Al proyectar la

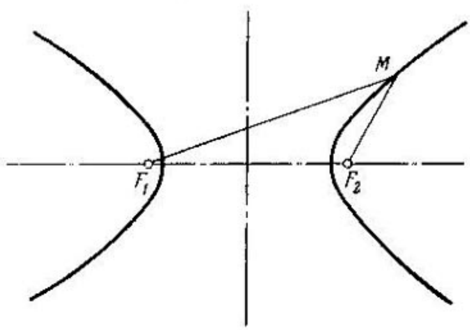


FIG. 59

velocidad $\mathbf{v}$ del punto que se mueve por la curva L sobre los radios vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ de este punto obtenemos:

$$v_1 = \mathrm{pr}_{\mathbf{r}_1}\mathbf{v} = -v\cos\alpha, \quad v_2 = \mathrm{pr}_{\mathbf{r}_2}\mathbf{v} = v\cos\alpha,$$

donde α es el ángulo formado por la tangente y los radios vectores. Sumando estas igualdades obtenemos:

$$v_1 + v_2 = 0,$$

de donde se deduce que la suma de longitudes de los radios vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ es un valor constante, es decir, la curva L es una elipse.

Llámase *hipérbola* la curva formada por todos los puntos cuya diferencia de distancias de los mismos a dos puntos dados F_1 y F_2, llamados focos, es un valor constante (fig. 59).

Ejercicio **15.** Demostrar que la tangente a la hiperbola es la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores trazados desde los focos al punto de tangencia (fig. 60).

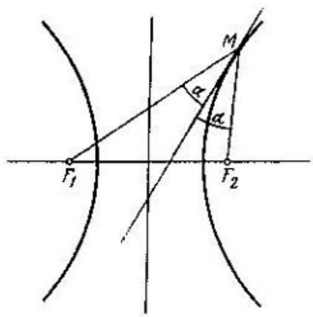


FIG. 60

Por el contrario, si la tangente a la curva en cada punto es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores que parten de dos puntos fijos F_1 y F_2 al punto de tangencia, entonces la curva L es una hipérbola con los focos en los puntos F_1 y F_2 (o el arco de esta hiperbola).

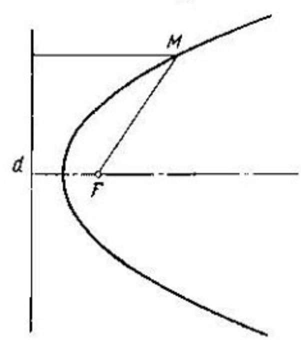


FIG. 61

Llámase *parábola* la curva formada por todos los puntos cuyas distancias a un punto dado F, denominado foco, y la recta dada d, denominada la directriz, son iguales entre si (fig. 61).

Ejercicio **16.** Demostrar que la tangente a la parábola es la bisectriz del ángulo formado por el radio vector trazado desde el foco F al punto de tangencia y la perpendicular bajada del punto de tangencia a la directriz d (fig. 62).

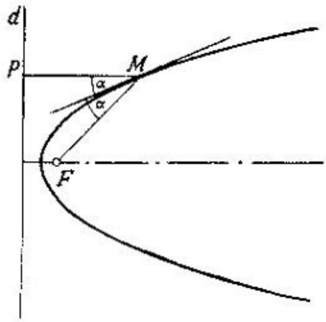


FIG. 62

Y viceversa, supongamos que la tangente a la curva en cada punto es la bisectriz del ángulo formado por el radio vector que parte del punto fijo F al punto de tangencia, y la perpendicular bajada desde el punto de tangencia a la recta fija d. Entonces esta curva es una parábola con el foco F y la directriz paralela a d (o el arco de esta parábola).

En calidad de los ejercicios adicionales recomendemos a los lectores resolver, aplicando el método cinemático, los problemas siguientes de la revista "Kvant" ("Cuanto") que se edita en ruso: 1) 1970, № 4, pág. 27, problema M18 (a); 2) 1971, № 4, pág. 33, problema M79; 3) 1973, № 4, pág. 43, problema M198; 4) 1974, № 11, pág. 40, problema M291; 5) 1974, № 12, pág. 44, problema M297.

INDICACIONES PARA LOS EJERCICIOS

1. La resolución es análoga a la del problema 1. Es necesario señalar que ahora para el triángulo equilátero ABC los puntos O_1, O_2 y O_3 coincidirán (el triángulo $O_1O_2O_3$ "se degenerará" en punto), y los vectores O_1O_2 y O_1O_3 se reducirán a cero. Con esto de la igualdad

$$\overline{O_1O_3} = U_{\frac{\pi}{3}}\overline{O_1O_2} + \mathbf{R}$$

resultará que $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

2. Fijar los puntos A, B y mover el punto C. Observar en este caso las velocidades de los puntos A' y B'. En la posición determinante hacer coincidir el punto C con el punto C'.

3. La resolución es análoga a la del problema 1. En la posición determinante hacer coincidir el punto C con uno de los puntos A o B.

4. La resolución es análoga a la del problema 3.

5. Fijar los puntos A y B y mover los puntos C y D. En este caso el movimiento de los puntos C y D ha de estar concordado de tal modo que el triángulo CSD con el vértice inmóvil S permanezca el triángulo isósceles. Demostrar que $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_T$.

6. De modo análogo al ejercicio anterior demostrar que $\mathbf{v}_Q = -\mathbf{v}_T$.

7. De modo análogo al problema 1 demostrar que

$$\overline{AA'} = U_{-\frac{\pi}{3}}\overline{C'C}, \quad \overline{BB'} = U_{\frac{\pi}{3}}\overline{C'C}.$$

De aquí es preciso deducir que las rectas AA', BB' y CC' se intersecan por pares en la circunferencia descrita alrededor del triángulo ABC.

8. Fijar las rectas b, c y d y mover la recta a paralelamente a sí misma con una velocidad constante. Luego demostrar que

$$\mathbf{v}_{O_3} = \lambda\mathbf{v}_{O_1}, \quad \mathbf{v}_{O_4} = \mu\mathbf{v}_{O_1},$$

donde $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$. Al examinar dos (!) posiciones determinantes establecer que las constantes $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ son iguales a cero: si a pasa por el punto A, si a pasa por el punto B. Es necesario aprovechar la circunstancia de que el vector colineal, simultáneamente a dos rectas que se intersecan, es igual a cero.

9. Durante el movimiento del punto C la velocidad angular de rotación de las rectas de Simpson p y q es igual a la velocidad angular de rotación de los rayos AC y BC.

10. Al usar el resultado del problema 5 demostrar al principio que los puntos P_1, P_2 y P_3 se encuentran en una recta. Luego, fijando los puntos A, B y P girar alrededor de los puntos A y B las rectas AC y BC con una misma velocidad angular. Examinar las velocidades angulares de las rectas $P_1P_2P_3$ y P_1G. La posicion determinante se elige del mismo modo como en el problema 5

11. Fijar los puntos A y C y girar alrededor de éstos las rectas AB, CM y CB con una misma velocidad angular. Observar el movimiento de los puntos O_1, O_2 y O_3. Examinar la posición en que las rectas AC y AB coinciden.

12. Fijar los puntos B, C y D y girar alrededor de éstos las rectas BF, CF y DA con una misma velocidad angular hasta que pasen por el punto M. Luego utilizar el resultado del ejercicio anterior.

13. Aprovechar la circunstancia de que la longitud de la cuerda PN permanece constante (véase la solución del problema 7).

14. Previamente demostrar que la distancia del vértice del triángulo al punto de intersección de las alturas es igual a la distancia duplicada desde el centro de la circunferencia descrita alrededor del triángulo hasta el lado correspondiente. Es fácil hacerlo sin la cinemática. Luego, aprovechar el hecho de que durante el movimiento de los puntos M, N y P las rectas O_1M y NP permanecen perpendiculares una a otra y la distancia desde el punto O hasta la recta NP es constante.

15. La resolución es análoga a la del problema 8.

16. La resolución es análoga a la del problema 8, pero en vez de la velocidad de variación de longitud del segundo radio vector es necesario examinar la velocidad de variación de la distancia entre el punto móvil y la directriz

A NUESTROS LECTORES:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y de ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a: Editorial "Mir", 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú I–110, GSP, URSS

V. Uspenski

La máquina de Post

El libro narra acerca de una máquina calculadora abstracta (es decir, inexistente en el arsenal de la técnica actual), la llamada máquina de Post. Los cálculos en esta máquina reflejan muchos resgos esenciales de cómputo en las calculadoras electrónicas reales. La enseñanza de los principios de programación en la máquina de Post y la explicación de las posibilidades de esta máquina, se realizan en ejemplos elementales que, pese a la extraordinaria sencillez, resultan bastante extensos.
No es necesario que el lector posea conocimientos de matemáticas que rebasen el marco de la escuela primaria. El libro ofrecido, en cierta medida, habrá de contribuir a la introducción de tales conceptos como "algoritmo", "máquina calculadora universal", "programación" en la escuela de enseñanza secundaria, incluso en sus primeros cursos. Hasta los escolares de los primeros grados y los niños en edad preescolar pueden efectuar sis trabajo operaciones en la máquina de Post, según un programa dado.
Este folleto se basa en las conferencias dictadas por el autor para los estudiantes de enseñanza media y de la Universidad de Moscú.
El folleto está destinado a los estudiantes de ensenañza media y a todos los amantes de las matemáticas.

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial

N.Ya. Vilenkin
Método de aproximaciones sucesivas
V.G. Shervátov
Funciones hiperbólicas
V.A. Uspenski
Algunas aplicaciones
de la mecánica a las matemáticas
G.E. Shilov
Gama simple
Cómo construir las gráficas
A.S. Solodóvnikov
Sistemas de desigualdades lineales

Editorial MIR Moscú